

4

DIFERENSIASI & INTEGRASI NUMERIK

Pada bab ini dibahas konsep dasar diferensiasi dan integrasi numerik, meliputi teknik pendekatan atau penghampiran, metode komputasi numerik berkaitan dengan bentuk diferensial dan integral, serta penggunaannya dalam beberapa kasus.

A. SASARAN UMUM

Sasaran umum dari perkuliahan ini adalah memberikan pemahaman kepada mahasiswa mengenai proses pendekatan bentuk diferensial dan integral ke dalam model komputasi numerik, dan memberikan dasar-dasar teknis implementasi menyelesaikan bentuk diferensial dan integral sederhana.

B. SASARAN KHUSUS

Setelah perkuliahan selesai dilaksanakan, mahasiswa diharapkan mampu:

1. Menjelaskan teknik pendekatan atau penghampiran diferensiasi dan integrasi secara komputasi numerik
2. Menjelaskan kedudukan konvergensi iterasi dalam kasus-kasus komputasi dalam diferensiasi numerik
3. Menyebutkan beberapa metode yang digunakan didalam menyelesaikan bentuk-bentuk diferensial dan integral.
4. Mengimplementasikan diferensiasi & integrasi numerik dalam beberapa kasus yang ditangani.

C. URAIAN MATERI

4.1 PENDEKATAN DIFERENSIAL

Masalah diferensiasi numerik adalah penentuan nilai pendekatan atau hampiran untuk turunan suatu fungsi f yang umumnya diberikan dalam bentuk tabel. Diferensiasi numerik harus dihindari bilamana mungkin karena umumnya nilai pendekatan diferensial akan kurang teliti dibandingkan nilai fungsi yang merupakan asal nilai-nilai tersebut diturunkan. Sebenarnya, turunan adalah limit dari hasilbagi

dan dalam hal ini ada proses pengurangan dua besaran bernilai besar dan membagi dengan besaran kecil. Lebih lanjut jika fungsi f dihipotesiskan menggunakan suatu polinom p , selisih dalam nilai-nilai fungsi boleh jadi kecil tetapi turunan-turunannya mungkin sangat berbeda. Karenanya masuk akal bahwa diferensiasi numerik adalah runyam, berlawanan dengan integrasi numerik, yang tidak banyak dipengaruhi oleh ketidaktepatan nilai-nilai fungsi, karena integrasi pada dasarnya adalah suatu proses yang mulus.

Hubungan yang erat antara diferensiasi dan integrasi bisa ditinjau pada suatu fungsi $y(t)$ yang merupakan posisi benda sebagai fungsi waktu, bentuk diferensialnya tertuju pada kecepatan,

$$v(t) = \frac{d}{dt} y(t) \quad (4.1)$$

Sebaliknya, dari konsep kecepatan sebagai fungsi waktu, integrasinya akan menghasilkan suatu besaran posisi,

$$y(t) = \int_0^t v(t) dt \quad (4.2)$$

Berikut ini akan dibahas beberapa teknik atau metode pendekatan yang pada bab selanjutnya menjadi penting dan bermanfaat dalam menyelesaikan persamaan-persamaan diferensial secara komputasi numerik.

4.1a Formula Beda Pusat (*Central Difference*)

Tinjau diferensial suatu fungsi $f(x)$ pada $x=0$, $f'(0)$. f berada pada kisi-kisi ruang berjarak sama terhadap nilai x , dengan generalisasi:

$$f_n = f(x_n); x_n = nh \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.3)$$

Dengan deret Taylor berusaha dihitung nilai pendekatan dari $f'(0)$ dalam bentuk f_n , dengan cara menguraikan f disekitar sumbu $x=0$,

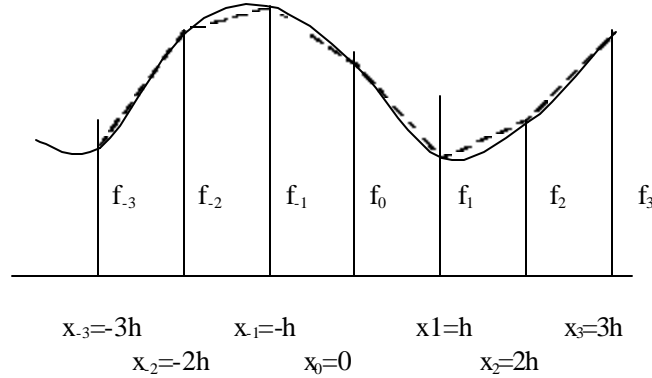
$$f(x) = f_0 + xf' + \frac{x^2}{2!} f'' + \frac{x^3}{3!} f''' + \dots$$

semua turunan dievaluasi pada $x=0$, didapatkan bentuk persamaan

$$f \pm 1 \equiv f(x = \pm h) = f_0 \pm hf' + \frac{h^2}{2} f'' \pm \frac{h^3}{6} f''' + O(h^4) \quad (4.4)$$

$$f \pm 2 \equiv f(x = \pm 2h) = f_0 \pm 2hf' + 2h^2 f'' \pm \frac{4h^3}{3} f''' + O(h^4) \quad (4.5)$$

dimana $O(h^4)$ merupakan pendekatan kesalahan dalam orde 4 atau lebih tinggi.



Gambar 4.1. Nilai f pada kisi ruang berjarak sama. Garis putus menunjukkan interpolasi linear

Subtraksi f_{-1} dari f_1 pada persamaan (4.4) memberikan bentuk diferensial,

$$f' \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} f''' + O(h^4) \quad (4.6)$$

bentuk f''' akan tereduksi ketika h diperkecil dan kesalahan dominan berkaitan dengan estimasi beda batas, sehingga didapatkan bentuk pertama:

$$f' \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \quad (4.7)$$

yang merupakan formula beda pusat (*central difference*) dengan 3 titik, yang lebih dikenal sebagai “3 point” formula atau formula 3 titik. Formula ini menjadi eksak jika f adalah polinomial orde dua di dalam interval 3 titik $[-h, +h]$. Esensi dari persamaan (4.7) adalah asumsi bahwa interpolasi polinomial kuadrat terhadap f melalui 3 titik valid, $x = \pm h, 0$ dan merupakan hasil yang alami, karena formula digunakan sebagai definisi derivatif dalam kalkulus dasar.

Kesalahan secara prinsip bisa dibuat sekecil mungkin dengan mengambil nilai h yang lebih kecil. Berdasarkan perbedaan simetri pada $x=0$, formula (4.7) ini lebih akurat (oleh pangkat $1h$) dibandingkan dengan formula beda maju (*forward difference*) atau beda mundur (*backward difference*),

$$f' \approx \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h) \quad (4.8)$$

$$f' \approx \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h) \quad (4.9)$$

Formula ini dikenal sebagai “2 point” formula atau formula 2 titik, yang didasarkan pada asumsi bahwa f didekati oleh sebuah fungsi linear yang melalui interval antara $x=0$ dan $x=\pm h$.

Berikut disajikan pilihan populer formula beda pusat pada orde kesalahan $O(h^2)$ dan $O(h^4)$ dengan konvensi $f_k = f(x_0 + hk)$ untuk $k=\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.

Formula beda pusat orde $O(h^2)$

$$f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \quad ; \text{ formula 3 titik}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

$$f'''(x_0) \approx \frac{f_2 - 2f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3} \quad (4.10)$$

$$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4}$$

Formula beda pusat orde $O(h^4)$

$$f'(x_0) \approx \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h} \quad ; \text{ formula 5 titik}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2} \quad (4.11)$$

$$f'''(x_0) \approx \frac{-f_3 + 8f_2 - 13f_1 + 13f_{-1} - 8f_{-2} + f_{-3}}{8h^3}$$

$$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{-f_3 + 12f_2 - 39f_1 + 56f_0 - 39f_{-1} - 12f_{-2} - f_{-3}}{6h^4}$$

Contoh 4.1

Andaikan $f(x)=\cos x$

[a] Gunakan formula pendekatan $f''(x)$ dengan $h=0,1$; $0,01$; dan $0,001$ dan cari pendekatan untuk $f''(0,8)$. Gunakan 9 digit desimal dalam semua perhitungan.

[b] Bandingkan dengan nilai benar $f''(0,8)=-\cos(0,8)$

solusi

[a] Perhitungan untuk $h=0,01$ adalah

$$f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

$$f''(0,8) \approx \frac{f(0,81) - 2f(0,80) + f(0,79)}{0,0001}$$

$$\approx \frac{0,689498433 - 2(0,696706709) + 0,703845316}{0,0001} = 0,696690000$$

[b] Kesalahan pendekatan adalah $0,000016709$

Perhitungan pendekatan komputasi numerik terhadap $f''(x)$ selengkapnya disajikan dalam tabel berikut:

h	<i>pendekatan</i>	<i>Kesalahan</i>
0,1	-0,696126300	-0,000508409
0,01	-0,696669000	-0,000016709
0,001	-0,696000000	-0,000706709

Contoh 4.2

Buatlah program sederhana untuk menghitung $f'(x=1)$ dari fungsi $f(x)=\sin x$, dengan menggunakan formula 3 titik. Jawaban eksak, $\cos 1=0,540302$. Bandingkan hasilnya dengan formula beda maju/mundur dan formula 5 titik.

solusi

Dengan program BASIC diujikan persamaan pendekatan komputasi numerik (4.7), yaitu

$$f' \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

sebagai input adalah nilai h

```
10 X=1; EXACT=cos(X)
20 INPUT "masukkan nilai h (lebar langkah)";H
30 IF H<=0 THEN STOP
```

```

40 FPRIME=(sin(X+H)-sin(X-H))/(2*H)
50 DIFF=EXACT-FPRIME
60 PRINT USING "h-#.#####, Kesalahan=+#.#####";H,DIFF
70 GOTO 20

```

Formula 3 titik, diimplementasikan pada line 40, dinyatakan dengan deklarasi $FPRIME=(\sin(X+H)-\sin(X-H))/(2*H)$. program ditujukan untuk menampilkan data kesalahan pada proses iterasinya.

Berikut disajikan data selengkapnya evaluasi kesalahan untuk formula 3 titik. Disamping itu disajikan perbandingannya dengan perhitungan menggunakan formula 2 titik dan formula 5 titik.

<i>H</i>	<i>Simetri 3 titik</i>	<i>2 titik (Maju)</i>	<i>2 titik (mundur)</i>	<i>Simetri 5 titik</i>
0,50000	0,022233	0,228254	-0,183789	0,001092
0,20000	0,003595	0,087461	-0,080272	0,000028
0,10000	0,000899	0,042938	-0,041139	0,000001
0,05000	0,000225	0,021258	-0,020808	0,000000
...
...
0,00010	-0,000312	-0,000312	-0,000312	-0,000411
0,00005	0,000284	0,001476	-0,000908	0,000681
0,00002	0,000880	0,000880	0,000880	0,000873
0,00001	0,000880	0,003860	-0,002100	0,000880

Hasil dari program secara umum, formula 3 titik memiliki hasil evaluasi yang hampir sama dibanding dengan formula 2 titik. Jawaban cukup terarah ketika nilai h diperkecil, tetapi hanya sampai pada satu titik tertentu, dan setelah itu yang terjadi adalah cukup buruk. Hal ini karena aritmetika pada komputer dibentuk hanya sampai presisi terbatas (variabel presisi tunggal BASIC memiliki 5-6 digit desimal), sehingga ketika h cukup kecil dan beda f_1 dengan f_{-1} sangat kecil, maka terjadi *round off error*. Ketika $h=10^{-6}$ maka $f_1=\sin(1,000001)=0,841472$; $f_{-1}=\sin(0,999999)=0,841470$, sehingga $f_1-f_{-1}=0,000002$ pada 6 digit angka signifikan. Ketika disubstitusikan pada formula 3 titik, maka f^* 1,000000, hasil yang sangat buruk. Jika menggunakan aritmetika 10 digit signifikan, maka $f_1=0,8414715251$;

sementara $f_1=0,8414704445$, yang memberikan hasil yang cukup dapat dipertanggungjawabkan $f' \approx 0,540300$.

Jadi seperti pada penjelasan diawal, bahwa diferensiasi numerik secara intrinsik prosesnya tidak stabil (*no well-defined limit as $h \rightarrow 0$*), sehingga harus diselesaikan dengan hati-hati.

Dari formula 5 titik, derivatif dihitung dengan cara mengambil asumsi bahwa f didekati dengan polinomial orde 4 melalui interval 5 titik $[-2h, 2h]$. Walaupun membutuhkan komputasi yang lebih, pendekatan ini lebih akurat seperti terlihat pada perbandingan komputasi diatas.

4.1b Formula Beda Maju/Mundur

Jika fungsi tidak dapat dihitung pada absis-absis yang terletak pada kedua sisi x , maka rumus beda pusat tidak dapat dipakai untuk menghampiri derivatif. Bilamana fungsi dapat dihitung pada absis-absis berjarak sama yang terletak ke kanan (kiri) dari x , maka dapat digunakan formula beda maju (mundur). Formula tersebut dapat diturunkan memakai metode-metode yang berlainan, pembuktiannya dapat bersandar pada deret Taylor, polinom pengintegralan Lagrange, atau polinom interpolasi Newton. Beberapa formula beda maju/mundur berorde $O(h^2)$, sebagai berikut:

Formula beda maju (*forward difference*)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &\approx \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} \\
 f''(x) &\approx \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2} \\
 f'''(x) &\approx \frac{-5f_0 + 18f_1 - 24f_2 + 14f_3 - 3f_4}{2h^3} \\
 f^{(4)}(x) &\approx \frac{3f_0 - 14f_1 + 26f_2 - 24f_3 + 11f_4 - 2f_5}{h^4}
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

Formula beda mundur (*backward difference*)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &\approx \frac{3f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{2h} \\
 f''(x) &\approx \frac{2f_0 - 5f_{-1} + 4f_{-2} - f_{-3}}{h^2}
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

$$f'''(x) \approx \frac{5f_0 - 18f_{-1} + 24f_{-2} - 14f_{-3} + 3f_{-4}}{2h^3}$$

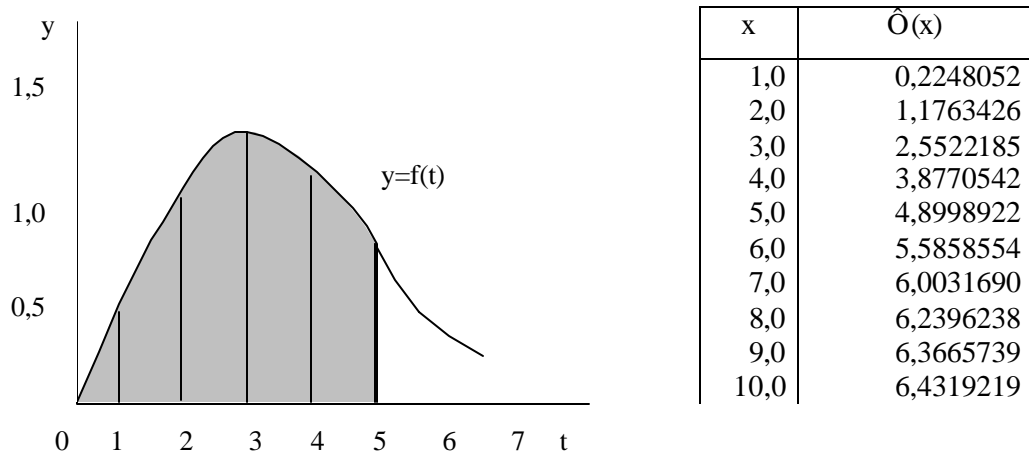
$$f''''(x) \approx \frac{3f_0 - 14f_{-1} + 26f_{-2} - 24f_{-3} + 11f_{-4} - 2f_{-5}}{h^4}$$

4.2 INTEGRASI NUMERIK

Integrasi numerik adalah piranti utama yang dipakai ilmuwan dalam mencari pendekatan jawaban untuk integral tentu yang tidak bisa diselesaikan secara analitik. Pada bidang statistika termodinamik, model Debye untuk menghitung kapasitas panas dari benda memenuhi fungsi:

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{t^3}{e^t - 1} dt \quad (4.14)$$

saat tidak ada pernyataan analitik untuk $\hat{O}(x)$, integrasi numerik harus digunakan untuk mencari nilai pendekatannya. Sebagai contoh, nilai $\hat{O}(5)$ adalah area dibawah kurva $y=f(t)=t^3/(e^t-1)$ untuk $0 \leq t \leq 5$ (lihat gambar 4.2).



Gambar 4.2. Area dibawah kurva $y=f(t)$ untuk $0 \leq t \leq 5$ & nilai $\hat{O}(x)$

Nilai pendekatan untuk $\hat{O}(5)$ adalah

$$\Phi(5) = \int_0^5 \frac{t^3}{e^t - 1} dt \approx 4,8998922$$

setiap penambahan nilai $\hat{O}(x)$ harus ditentukan oleh integrasi numerik yang lain.

Tujuan dari pembahasan materi ini adalah untuk memahami prinsip-prinsip dasar integrasi numerik. Sasaran dasarnya adalah pendekatan integral tentu $f(x)$ pada selang $a \leq x \leq b$ dengan sejumlah titik-titik sampel (*sample nodes*), (x_0, f_0) , (x_1, f_1) , $(x_2, f_2), \dots, (x_M, f_M)$ dengan $f_k = f(x_k)$. Rumus pendekatan berbentuk:

$$\int_a^b f(x) dx = w_0 f_0 + w_1 f_1 + \dots + w_M f_M \quad (4.15)$$

nilai-nilai w_0, w_1, \dots, w_M berupa konstanta atau bobot. Tergantung pada penerapan yang diinginkan, simpul-simpul x_k dipilih dalam berbagai cara. Untuk aturan Trapesium, Simpson, dan aturan Boole, simpul-simpul $x_k = a + hk$ dipilih berjarak sama. Untuk integrasi Gauss-Legendre simpul-simpul dipilih berupa titik-titik nol dari polinom-polinom Legendre tertentu. Bilamana formula integrasi dipakai menurunkan suatu algoritma eksplisit untuk memecahkan persamaan diferensial, simpul-simpul semuanya dipilih lebih kecil dari b .

Beberapa formula umum yang berdasarkan pada interpolasi polinom disebut formula integrasi Newton Cotes. Ketika titik sample $x_0=0$ dan $x_M=b$ digunakan dalam formula, formula tersebut dinamakan formula Newton Cotes tertutup.

Berikut ini adalah beberapa metode integrasi numerik yang populer digunakan,

a. \hookrightarrow **Trapezoidal Rule (Aturan Trapesium)**

Simplicity, Optimal for improper integrals, Needs a large number of sub intervals for good accuracy

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f_0 + f_1)$$

b. \hookrightarrow **Simpson's 1/3 Rule**

Simplicity. Higher accuracy than trapezoidal rule, Even number of interval only

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2)$$

c. *Multiple-application Simpson's 1/3 Rule*

d. *Simpson's 3/8 Rule*

e. *Newton Cotes*

f. *Romberg Integration*

g. *Gauss Quadrature*

Yang akan ditelaah dan diimplementasikan didalam menangani kasus-kasus yang berkaitan dengan integrasi numerik pada sub bahasan ini adalah aturan Trapesium dan aturan Simpson 1/3, dengan alasan utama kesederhanaannya.

4.2a Aturan Trapesium (*Trapezoidal Rule*)

Aturan Trapesium adalah metode integrasi numerik yang didapatkan dengan mengintegrasikan formula interpolasi linear, dituliskan:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] + E \quad (4.16)$$

Sebagaimana gambar 4.1, area dibawah garis interpolasi (putus-putus) adalah integral yang dihitung oleh aturan trapesium, sedangkan dibawah kurva, $f(x)$ adalah nilai eksak.

Persamaan (4.16) bisa diperluas untuk banyak interval. Untuk N interval dengan jarak langkah h , perluasan aturan trapesium:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} [f(a) + \sum_{j=1}^{N-1} f(a + jh) + f(b)] + E \quad (4.17)$$

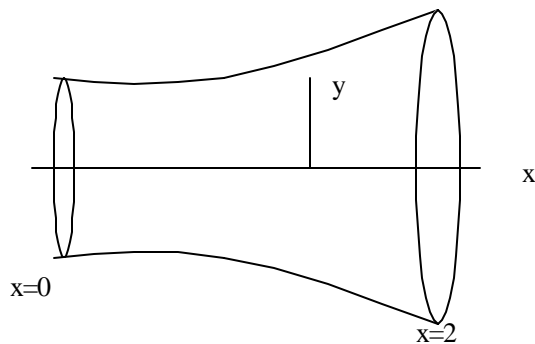
dimana $h=(b-a)/N$. Persamaan bisa dituliskan dalam ekivalensinya, yaitu:

$$I = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{N-1} + f_N) + E \quad (4.18)$$

dimana $f_0=f(a)$, $f_1=f(a+h)$, dan $f_i=f(a+ih)$

Contoh 4.3

Sebuah benda putar, diperlihatkan pada gambar 4.3, dibentuk dengan memutar kurva $y=1+(x/2)^2$, $0 \leq x \leq 2$, disekitar sumbu x . Hitunglah volume menggunakan perluasan aturan trapesium dengan $N=2,4,8,16,32,64$ dan 128. Nilai benar adalah $I=11,7286$. Evaluasi kesalahan pada setiap N .



Solusi

Volume diberikan oleh persamaan:

$$I = \int_0^2 f(x) dx$$

dimana

$$f(x) = p \left(1 + \left(\frac{x}{2} \right)^2 \right)^2$$

Kalkulasi untuk N=2 dan 4 ditunjukkan sebagai berikut:

N=2:

$$h=2/2=1$$

$$I \cong \frac{1}{2} [f(0) + 2f(1) + f(2)] = 0,5p [1 + 2(1,5625) + 4] = 12,7627$$

N=4:

$$h=2/4=0,5$$

$$I \cong \frac{0,5}{2} [f(0) + 2f(0,5) + 2f(1) + 2f(1,5) + f(2)] = 11,9895$$

Integrasi dengan N yang lain memberikan hasil sebagai berikut:

N	h	I _h	e _h
2	1	12,7627	-1,0341
4	0,5	11,9895	-0,2609
8	0,25	11,7940	-0,0654
16	0,125	11,7449	-0,0163
32	0,0625	11,7326	-0,0040
64	0,03125	11,7296	-0,0010
128	0,015625	11,7288	-0,0002

Hasil ini memberikan data bahwa kesalahan berkurang sebanding dengan h².

Kesalahan pada perluasan aturan trapesium didefinisikan sebagai:

$$E = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] \tag{4.19}$$

dimana bentuk pertama adalah integral eksak, dan bentuk kedua adalah bentuk dari aturan trapesium. Kesalahan ini adalah penjumlahan kesalahan untuk seluruh interval. Ketika perluasan aturan trapesium digunakan pada interval $[a,b]$, yang mana dibagi ke dalam N interval dengan $N+1$ titik x_0, x_1, \dots, x_N , dengan $x_0=a$ dan $x_N=b$. Sehingga kesalahan perluasan aturan trapesium menjadi:

$$E \cong -\frac{1}{12} \frac{(b-a)^3}{N^3} \sum_{i=1}^N f''(\bar{x}_i) \quad (4.20)$$

Algoritma Aturan Trapesium

(a) Segmen Tunggal

```
FUNCTION Trap(h,f0,f1)
  Trap=h*(f0+f1)/2
END Trap
```

(b) Segmen Banyak

```
FUNCTION Trapm (h,n,f)
  Sum=f0
  DO i=1,n-1
    Sum=sum+2*fi
  END DO
  Sum=sum + fn
  Trap=h*sum/2
END Trapm
```

Contoh 4.4

Kecepatan sebuah kapal selam yang berada dibawah kepingan es kutub diberikan dalam tabel. Nilai-nilai pendekatan jarak tempuh semuanya diperoleh memakai aturan trapesium. Periksa kebenaran bahwa hampiran untuk jarak total yang ditempuh selama selang waktu $[0,2]$ adalah 16,5 km.

Waktu,t (jam)	Kecepatan, v(t) (km/jam)	Pendekatan jarak tempuh selama selang $[0,t]$ (km)
0,00	6,0	0,0000

0,25	7,5	1,6875
0,50	8,0	3,6250
0,75	9,0	5,7500
1,00	8,5	7,9375
1,25	10,5	10,3125
1,50	9,5	12,8125
1,75	7,0	14,8750
2,00	6,0	16,500j

Solusi

Jarak tempuh didefinisikan sebagai

$$jarak = \int_0^2 v(t) dt$$

gunakan aturan trapesium, dengan $N=8$, $h=0,25$, sehingga

$$jarak_tempuh(v,h) = \frac{0,25}{2} (6 + 6) + 0,25(7,5 + 8 + 9 + 8,5 + 10,5 + 9,5 + 7) = 16,5km$$

4.2b Aturan Simpson 1/3

Adalah aturan yang cukup populer dari sekian banyak metode integrasi, didasarkan pada interpolasi polinomial orde dua. Dirumuskan sebagai formula aturan Simpson 1/3 dengan persamaan:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(\bar{x}) + f(b)] + E \quad (4.21)$$

dimana $h = \frac{(b-a)}{2}$ dan $\bar{x} = \frac{(a+b)}{2}$

Persamaan (4.21) dapat dituliskan sebagai

$$I = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_i + f_2] + E \quad (4.22)$$

dimana $f_i = f(x_i) = f(a + ih)$, dengan kesalahan sebesar:

$$E \cong -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\bar{x})$$

Aturan Simpson 1/3 juga bisa diadaptasi untuk N genap interval, yang formulanya dituliskan sebagai berikut;

$$I = \frac{h}{3} [f(a) + 4 \sum_{i=1(\text{ganjil})}^{N-1} f(a+ih) + 2 \sum_{i=2(\text{genap})}^{N-2} f(a+ih) + f(b)] + E$$

atau dituliskan

$$I = \frac{h}{3} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N] + E$$

Contoh 4.5

Hitunglah volume sebuah benda putar, pada contoh 4.3 menggunakan perluasan aturan Simpson 1/3 dengan $N=2,4,8,16,32,64$. Nilai benar adalah $I=11,7286$. Evaluasi kesalahan pada setiap N .

Solusi

Kalkulasi untuk $N=2$ dan 4 ditunjukkan sebagai berikut:

$N=2$:

$$h=2/2=1$$

$$I \cong \frac{h}{3} [f(0) + 4f(1) + f(2)] = (p/3)[1 + 4(1,5625) + 4] = 11,7809$$

$N=4$:

$$h=2/4=0,5$$

$$I \cong \frac{0,5}{3} [f(0) + 4f(0,5) + 2f(1) + 4f(1,5) + f(2)] = 11,7318$$

Integrasi dengan N yang lain memberikan hasil sebagai berikut:

N	h	I_h	e_h
2	1	11,7809	-0,0523
4	0,5	11,7318	-0,0032
8	0,25	11,7288	-0,0002
16	0,125	11,7286	0,0000
32	0,0625	11,7286	0,0000
64	0,03125	11,7286	0,0000

Kalau dibandingkan hasilnya dengan contoh 4.3, dapat dijelaskan bahwa perluasan aturan Simpson 1/3 secara signifikan lebih akurat daripada kaidah trapesium pada jumlah interval yang sama. Akurasi kaidah trapesium menggunakan interval 32 ekuivalen dengan Simpson yang hanya interval 4. Kesimpulannya pada

kasus ini, aturan Simpson leebih cepat mendekati solusi eksak ketika h diperkecil, dan lebih akurat dua tingkat dibanding trapesium.

Algoritma Aturan Simpson

(a) Simpson 1/3

```
FUNCTION Simp13(h,f0,f1,f2)
    Simp13=2*h*(f0+4*f1+f2)/6
END Simp13
```

(b) Perluasan Simpson 1/3

```
FUNCTION Simp13p (h,n,f)
    Sum=f0
    DO i=1,n-2,2
        Sum=sum+4*fi + 2*fi+1
    END DO
    Sum=sum + 4*fn-1 +fn
    Simp13p=h*sum/3
END Simp13p
```

Contoh 4.6

Buatlah program untuk menghitung kesalahan komputasi dari

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1 = 1,718282$$

dengan menggunakan perluasan aturan Simpson 1/3. Cek perbandingannya dengan perluasan aturan trapesium !

Solusi

Program BASIC dengan input N

```
5 DEF FNF(X)=EXP(X)
10 EXACT=EXP(1) - 1
15 INPUT "masukkan N (jumlah iterasi)";N%
20 IF N%<=0 THEN STOP
25 '
30 H=1/N%
35 SUM=FNF(0)
40 FAC=2
45 '

```

```

50  FOR I%=1 TO N%-1
55  IF FAC=2 THEN FAC=4 ELSE FAC=2
60  X=I%*H
65  SUM=SUM+FNF(X)*FAC
70  NEXT I%
75  '
80  SUM=SUM+FNF(1)
85  INTEGRAL=H*SUM/3
90  DIFF=EXACT-INTEGRAL
95  PRINT USING "N=####, Kesalahan=#.#####";N%,DIFF
100 GOTO 15

```

Hasil program memberikan realitas bahwa pada kasus ini perluasan aturan Simpson konvergensinya cukup cepat, yaitu pada N=16, seperti tercantum pada tabel berikut.

N	h	e Simpson	e Trapeسيوم
4	0,2500000	-0,000037	-0,008940
8	0,1250000	0,000002	-0,002237
16	0,0625000	0,000000	-0,000559
32	0,0312500	0,000000	-0,000140
64	0,0156250	0,000000	-0,000035
128	0,0078125	0,000000	-0,000008

Sebagai pembandingan adalah perluasan aturan Trapezium dengan hasil kolom paling kanan, sekaligus bukti bahwa simpson disamping sederhana memiliki konvergensi yang cepat.

D. SOAL-SOAL

(4.1) Tegangan $E = E(t)$ dalam rangkaian listrik memenuhi persamaan $E(t) = L(dI/dt) + R I(t)$, dengan R hambatan dan L induktansi. Gunakan $L=0,05$ dan $R=2$ dan nilai-nilai untuk I ada dalam tabel berikut:

t	I(t)
1,0	8,2277
1,1	7,2428
1,2	5,9908

1,3	4,5260
1,4	2,9122

[a] Carilah $I'(1,2)$ menggunakan diferensiasi numerik, dan gunakan hasilnya untuk menghitung $E(1,2)$

[b] Bandingkan jawaban [a] dengan $I(t)=10 \exp(-t/10)\sin(2t)$

(4.2) Andaikan $f(x)=\ln x$, carilah pendekatan komputasi numerik untuk $f'(5)$ dengan menggunakan:

[a] formula orde $O(h^2)$ dengan $h=0,05$ dan $0,01$

[b] formula orde $O(h^4)$ dengan $h=0,01$

(4.3) Buatlah program untuk soal (4.1)

(4.4) Gunakan aturan Trapezium dan Simpson dengan $N=2,4,8,16$ dan $h=0,25$ untuk menghitung integral berikut:

$$[a] \int_1^3 \frac{xdx}{1+x^2} \quad [b] 3x^3 - 2x^2 + x + 2$$

(4.5) Buatlah program untuk soal (4.4) [a]

E. DAFTAR PUSTAKA

Chapra, S.C., and Canale, R.P., *Numerical Methods for Engineers*, McGraw-Hill, 1998

James, M.L., G.M. Smith, and J.C. Wolford, *Applied Numerical Methods for Digital Computations*, 3^d ed. Harper & Row, 1985

Koonin, S.E., *Computational Physics*, Addison-Wesley Inc, 1986

Mathews, J.H., *Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering*, Prentice-Hall Inc., 1992

McCracken, D. D., *Computing for Engineers and Scientists with Fortran 77*, Wiley, 1984

Morris, J.L., *Computational Methods in Elementary Numerical Analysis*, Wiley, 1983

Nakamura, S., *Applied Numerical Methods in C*, Prentice-Hall Inc. 1993

Sutrisno, *Dasar-dasar Metode Numerik*, MIPA-LPTK ITB, 1992

Wark, K. Jr., *Thermodynamics*, McGraw-Hill, 1998

Yakowitz, S., and F. Szidarovszky, *An Introduction to Numerical Computations*, Macmillan, 1986



